Unendliche Reihen

Was sind Unendliche Reihen?

Eine Funktion mit den natürlichen Zahlen als Definitionsmenge heißt Folge a_n
Die Summe aller Folgenglieder bis zu einem Bestimmten n bezeichnet man als Reihe dieser Folge: ${}_a S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Vorgestellt werden soll hier die Bestimmung des Grenzwertes solcher Reihen: $\lim_{n \to \infty} {}_a S_n$

Grenzwertuntersuchung an einem Beispiel

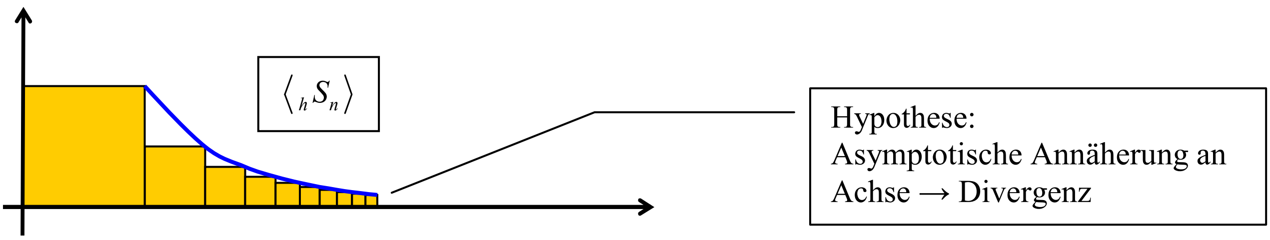
Die Grenzwerte der folgenden drei Reihen soll gefunden werden:

${}_h S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$	${}_g S_n = \sum_{i=1}^{n} k^{i-1} \quad (0 < k < 1)$	${}_t S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{k^i}{i!} \quad (0 < k)$

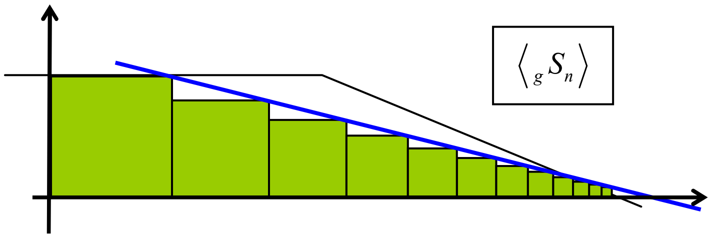
<u>Empirische Untersuchung</u>
Zunächst wird die Entwicklung der Reihen für große n mit einer Tabellenkalkulation untersucht, wobei man Grenzwerte oft schon erkennen und las Hypothesen festhalten kann. Diese Hypothesen haben aber noch keinen Beweischarakter.

n	${}_h S_n$	${}_g S_n$ (k = 0,8)	${}_t S_n$ (k = 1)
1	1,000	1,000	2,000
2	1,500	1,800	2,500
3	1,833	2,440	2,667
4	2,083	2,952	2,708
10	2,929	4,463	2,718
100	5,187	5,000	2,718
1000	7,485	5,000	2,718
Hypothese	**unendlich?**	**5**	**e**

<u>Geometrische Untersuchung</u>
Auch durch geschickte grafische Aufzeichnung der Reihen kann manchmal Divergenz bzw. Konvergenz abgelesen werden. Allerdings erhält man auch hier meist nur Hypothesen. Als Beispiel werden hier ${}_h S_n$ und ${}_g S_n$ dargestellt:



Nullstelle → Konvergenz



Analytische Untersuchung

Da die beiden Vorherigen Untersuchungen nur Hypothesen geliefert haben, ist es nun notwendig diese Auch zu beweisen. Dafür gibt es eine Vielzahl von mathematischen Bedingungen für die Konvergenz bzw. Divergenz von Reihen. Zwei sollen hier kurz vorgestellt werden:

Beim *Integralkriterium* überprüft man das uneigentliche Integral der Folge auf Divergenz um so die Divergenz einer Reihe nachzuweisen. Bei ${}_h S_n$ bestätigt sich so die Divergenz:

$$\lim_{a\to\infty}\int_c^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[\ln x\right]_c^a = \lim_{a\to\infty}\ln a - \ln c = \infty$$

Wenn sich die Reihe explizit ausdrücken läßt, kann der grenzwert auch *direkt durch Limesbildung* gebildet werden, wie hier an ${}_g S_n$ gezeigt wird. Die explizite Form kann anhand vollständiger Induktion bewiesen werden.

$$\lim_{n\to\infty} {}_g S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-k^n}{1-k} = \frac{1}{1-k} - \lim_{n\to\infty}\frac{k^n}{1-k} = \frac{1}{1-k} - 0 = \frac{1}{1-k} \quad (\text{wegen } 0<k<1)$$

Warum es soviel Lösungsansätze gibt wird an folgender Tabelle deutlich. Keinesfalls jedes Kriterium führt bei jeder Reihe zu einer Lösung. Somit ist individuell in der Literatur nach einem geeigneten zu suchen.

Lösungsansätze	Empirischer Ansatz	Geometr. Ansatz	Analytische Ansätze			
Reihen			Überprüfung notwendiges Kriterium	Überprüfung Integralkriterium	Direkt	Vergleichkriterium
${}_h S_n = \sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$	liefert Indiz	liefert Indiz	erfüllt	beweist Divergenz	nicht anwendbar	beweist Divergenz
${}_g S_n = \sum_{i=1}^{n} g_i = \sum_{i=1}^{n} k^{i-1}$	liefert Indiz	beweist Grenzwert	erfüllt	beweist Konvergenz	beweist Grenzwert	nicht angewandt
${}_t S_n = \sum_{i=0}^{n} t_i = \sum_{i=0}^{n}\frac{k^i}{i!}$	liefert Indiz	liefert Indiz	erfüllt	nicht anwendbar	beweist Grenzwert	nicht angewandt