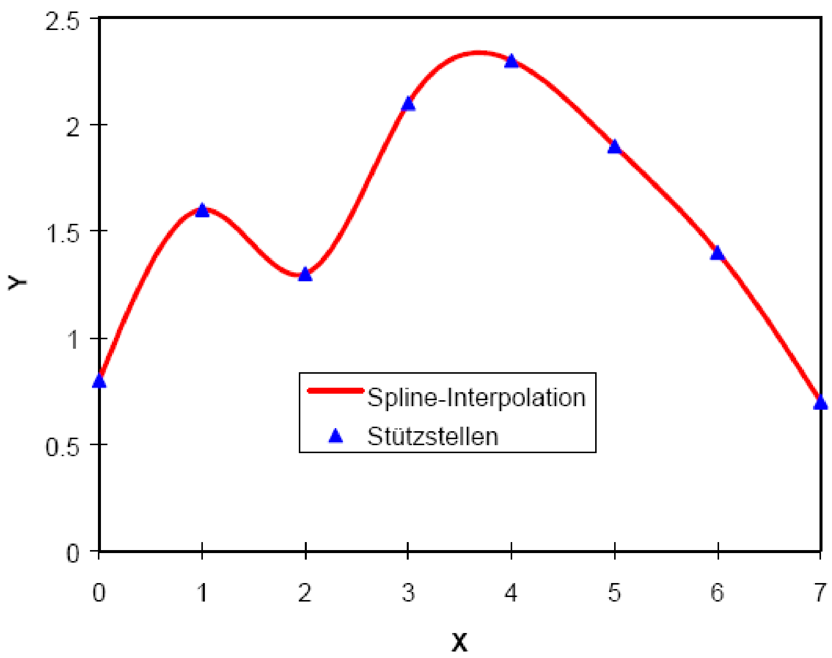
Gymnasium Ernestinum

Burgstraße 21

29221 Celle

Facharbeit
im Leistungskurs Mathematik

Interpolation mit Splines



Verfasser: Friedemann Winkler

Fachlehrer: Herr T. Gieseking, StR

Abgabetermin: 28. März 2006

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1. Aufgabenstellung

Stellen Sie die Theorie der Spline-Interpolation allgemein und an folgendem Beispiel dar:
Auf dem Intervall $[-1;1]$ sei ein kubischer Spline zu finden, der die Bedingungen

$s(-1)=0 \quad s(0)=1 \quad s(1)=0 \quad s'(-1)=0 \quad s'(1)=0$ erfüllt.

1.2. Der Begriff „Interpolation“

Interpolation dient dazu, einen mathematischen Funktionsterm zu finden, der festgelegte Punkte im Graphen durchläuft. Das Prinzip wird zum Beispiel bei der Auswertung von komplexen Versuchen mit relativ wenigen Messwerten benutzt, bei denen eine sinnvolle Analyse sonst nicht möglich wäre. Weitere Anwendungsbereiche sind die exakte Steuerung von Fabrikrobotern, die Darstellung von Computergrafiken in Designprogrammen (CAD)[①] und die Planung von Straßen.

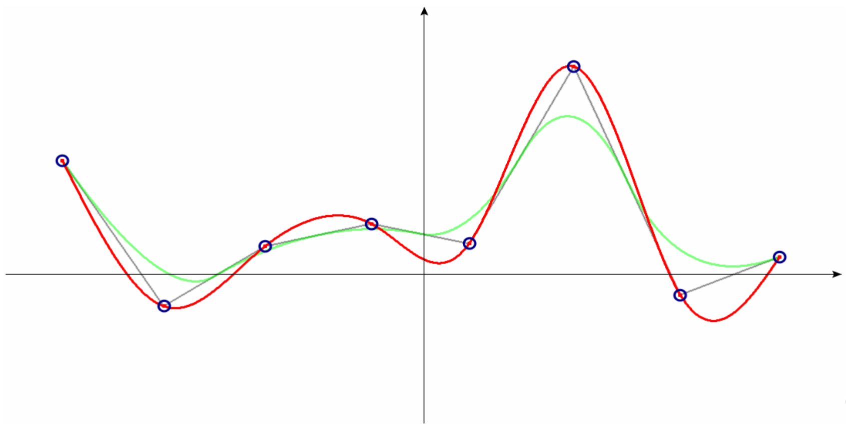
Der durch Interpolation berechnete Term hat mehrere Vorteile. Zum einen kann man durch ihn die Werte zwischen den feststehenden Messwerten approximieren. Außerdem können Zusammenhänge unter den Werten anschaulich gemacht werden (z.B. Ähnlichkeiten zu bekannten Funktionen).[②]

Es gibt verschiedene Interpolationsverfahren, die sich insbesondere in ihrer Qualität und Nutzbarkeit unterscheiden. Die Polynominterpolation und im Speziellen das Verfahren von Newton setzen auf eine Funktion vom Grad $(n-1)$, wobei n die Anzahl der Stützpunkte ist.

Ein anderes Verfahren ist neben vielen weiteren die Interpolation mit Splines. Diese teilt sich wiederum in verschiedene Verfahren auf, wie zum Beispiel lineare Splines, B-Splines oder kubische Splines.

① Zum Beispiel in den für diese Facharbeit benutzten Programmen Maxxon: Cinema 4D® [im Folgenden: Cinema 4D], Adobe: Photoshop® [i. F.: Photoshop] und Texas Instruments: Derive™ [i. F.: Derive]
② Steinhaus, Stefan: Analysis numerischer Methoden - Splineinterpolation (1996) , S. 2 [i. F.: Splines.pdf]

Zum Vergleich hier ein Schaubild:


[3]

Der Begriff Spline kommt aus dem Schiffsbau. Ein Spline ist ein dünner Stab, der früher von Schiffsbauern benutzt wurde, um die richtige Form der Stringer zu konstruieren (Stringer sind Planken, die in Schiffslängsrichtung quer zu den Spanten angebraucht werden und die Außenwand des Schiffes bilden). Die dünne Latte wurde dabei an einigen Fixierpunkten an den Schiffsrumpf gehalten und passte sich auf Grund ihrer hohen Elastizität der geringsten Welligkeit an.[4]

2. Polynominterpolation

2.1. Erläuterung des Verfahrens

Wenn man von der gesuchten Funktion $f(x)$ nur an vorgegebenen Argumentstellen $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ die zugehörigen Funktionswerte $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ kennt, dann kann man durch Interpolation auf die Funktion $p(x)$ schließen, die die gegebenen Punkte durchläuft. Dadurch werden von $p(x)$ an den Stellen zwischen den gegebenen Werten $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ die Funktionswerte der unbekannten Funktion $f(x)$ approximiert.[5]
Bei n Stützpunkten ist $p(x)$ eine Funktion vom Grad $(n-1)$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$ [6],

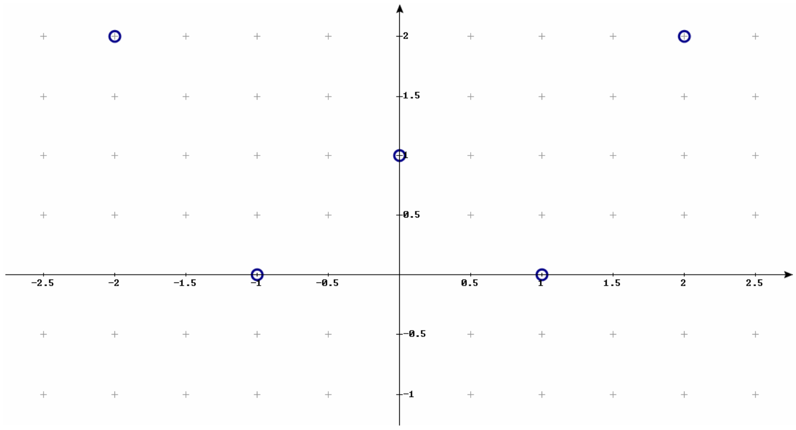
[3] Rot: Kubischer Spline, Grün: B-Spline, Grau: Linearer Spline; Alle Grafiken in dieser Facharbeit wurden mit Cinema 4D, Derive und Photoshop erstellt, es wurden keine anderen Grafiken als Vorlagen benutzt
[4] Brauch, Wolfgang u. a.: Mathematik für Ingenieure, 10. durchgesehene Auflage 2003, S. 308 [im Folgenden zitiert als: Mathematik für Ingenieure]
[5] Lehr- und Übungsbuch Mathematik V, 1992, S. 16 [im Folgenden zitiert als: Mathematik V]
[6] Mathematik für Ingenieure, S. 307

die durch die Stützpunkte eindeutig definiert ist und mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems gelöst werden kann. Es gibt immer genau ein Polynom, das die Interpolationsaufgabe löst.

2.2. Anwendung am Beispiel

Gegebene Punkte:

$$f(-2)=2 \qquad f(-1)=0 \qquad f(0)=1 \qquad f(1)=0 \qquad f(2)=2$$ [7]



Gesuchtes Polynom:

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$$

Aus den Punkten folgt ein lineares Gleichungssystem mit fünf Unbekannten.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \left\| \begin{array}{c} (I-III)+(V-III) \\ (II-III)+(IV-III) \\ \\ \\ (V-III)-4IV \end{array} \right.$$

Wegen Y-Achsensymmetrie gilt $a_1=0$ und $a_3=0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left\| \begin{array}{c} \frac{I-4II}{24} \\ \frac{16II-I}{24} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

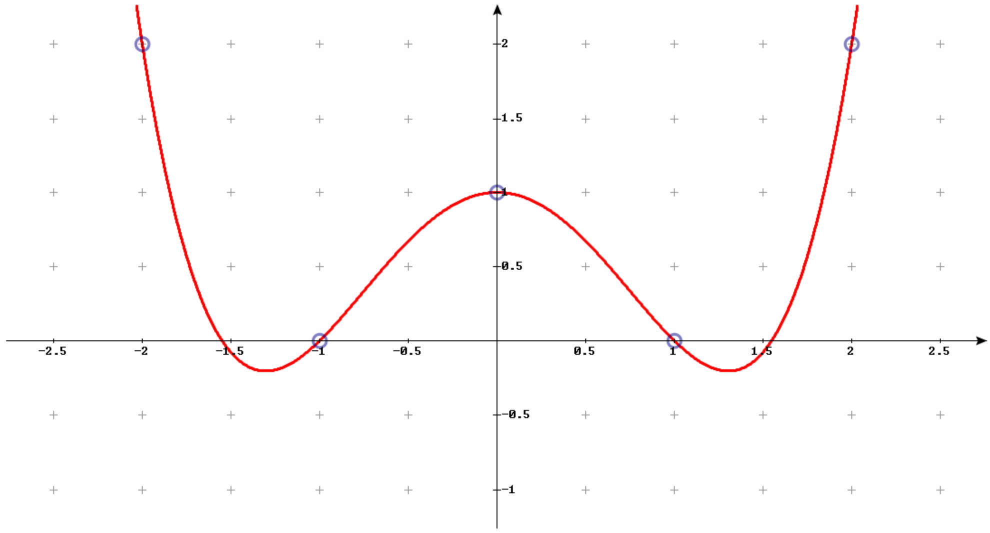
[7] Beispiel selber gewählt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} \\ -\frac{17}{12} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das gesuchte Polynom (siehe (3)), das die gegebenen Punkte interpoliert ist also:

$$p(x) = 1 - \frac{17}{12}x^2 + \frac{5}{12}x^4$$

Der dazugehörige Funktionsgraph:



2.3. Das Newton Verfahren

2.3.1. Erläuterung des Verfahrens

Die Methode von Isaac Newton führt auch zu einem Polynom von Grad $(n-1)$ (siehe (1)), ermöglicht aber eine leichtere Bestimmung der Koeffizienten. Man benutzt dafür die von Newton entwickelte Form für das Polynom:

$$N(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + c_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$ [8]

Aus den so erhaltenen Werten für $c_0, c_1, ..., c_n$ werden mit dividierten Differenzen die für das Polynom benötigten Koeffizienten berechnet.

[8] Mathematik V, S. 17

2.3.2. Anwendung am Beispiel

Gegebene Punkte:

$$N(-2)=2 \qquad N(-1)=0 \qquad N(0)=1 \qquad N(1)=0 \qquad N(2)=2$$ [9]

Definition der Stützstellen:

$$x_0=-2 \qquad x_1=-1 \qquad x_2=0 \qquad x_3=1 \qquad x_4=2$$

Berechnung mit der Newtonschen Formel:

$$N(x_0)=c_0+c_1(x_0-x_0)+c_2(x_0-x_0)(x_0-x_1)+c_3(x_0-x_0)(x_0-x_1)(x_0-x_2)$$
$$+c_4(x_0-x_0)(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)$$

Alle Summanden außer c_0 enthalten als Faktor (x_0-x_0) und fallen daher weg.

$$N(x_0)=c_0=2$$

$$N(x_1)=c_0+c_1(x_1-x_0)+c_2(x_1-x_0)(x_1-x_1)+c_3(x_1-x_0)(x_1-x_1)(x_1-x_2)$$
$$+c_4(x_1-x_0)(x_1-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)$$

Alle Summanden außer dem bereits bekannten c_0 und dem darauf folgenden $c_1(x_1-x_0)$ enthalten als Faktor (x_1-x_1) und fallen daher weg.

$$N(x_1)=c_0+c_1(x_1-x_0)=2+c_1(-1-(-2))$$

$$0=2+c_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad c_1=-2$$

Entsprechend lassen sich c_2, c_3 und c_4 berechnen:

$$N(x_2)=c_0+c_1(x_2-x_0)+c_2(x_2-x_0)x_2-x_1+c_3(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_2)$$
$$+c_4(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_2)(x_2-x_3)$$

$$N(x_2)=c_0+c_1(x_2-x_0)+c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$
$$=2-2(0-(-2))+c_2(0-(-2))(0-(-1))$$

$$1=-2+2c_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad c_2=\frac{3}{2}$$

$$N(x_3)=c_0+c_1(x_3-x_0)+c_2(x_3-x_0)(x_3-x_1)+c_3(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$
$$+c_4(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_3)$$

[9] Es wurde das gleiche Beispiel wie bei der Polynominterpolation gewählt, um Ähnlichkeiten zu zeigen

$$N(x_3) = c_0 + c_1(x_3 - x_0) + c_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$
$$= 2 - 2(1-(-2)) + \tfrac{3}{2}(1-(-2))(1-(-1)) + (c_3 1-(-2))(1-(-1))(1-0)$$

$$0 = 5 + 6c_3 \quad \Leftrightarrow \quad c_3 = -\frac{5}{6}$$

$$N(x_4) = c_0 + c_1(x_4 - x_0) + c_2(x_4 - x_0)(x_4 - x_1) + c_3(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)$$
$$+ c_4(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

$$N(x_4) = 2 - 2(2-(-2)) + \tfrac{3}{2}(2-(-2))(2-(-1)) - \tfrac{5}{6}(2-(-2))(2-(-1))(2-0)$$
$$+ c_4(2-(-2))(2-(-1))(2-0)(2-1)$$

$$2 = -8 + 24c_4 \quad \Leftrightarrow \quad c_4 = \frac{5}{12}$$

Mit Hilfe von dividierten Differenzen kann man nun aus den Werten für c_0 bis c_4 das Interpolationspolynom berechnen.[10] Es ist das gleiche Polynom, das auch schon durch die normale Polynominterpolation berechnet wurde.

3. Splineinterpolation

3.1. Grundidee

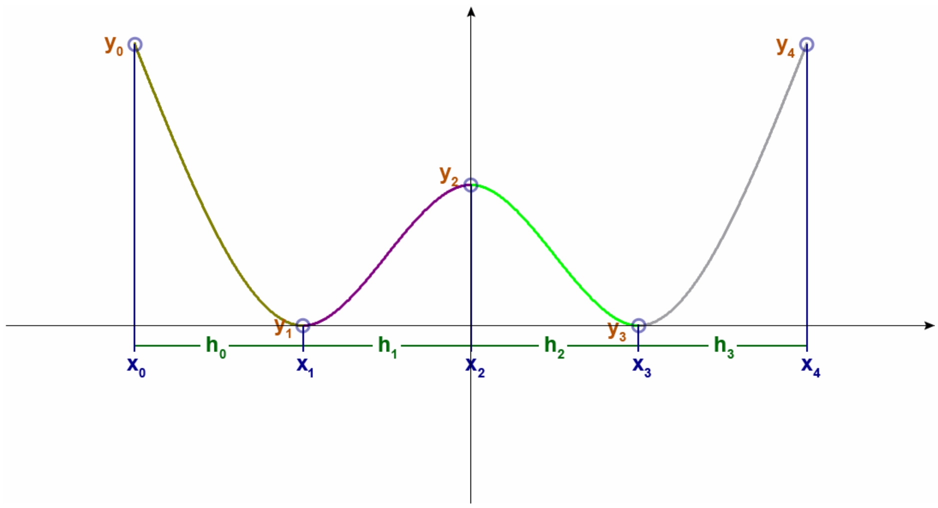
Bei der Interpolation mit Splines wird für das Intervall zwischen jeweils zwei Stützstellen ein eigenes Polynom berechnet, das die Stützpunkte schneidet. Im einfachsten Fall (lineare Splines) ist dieses Polynom ersten Grades, also eine lineare Funktion. Als Bedingungen für diese Funktion dienen die beiden Stützpunkte, die die Gerade hinreichend beschreiben. Normalerweise verwendet man aber Polynome höheren Grades, um „Knicke“ in der Gesamtfunktion zu verhindern. In dieser Facharbeit wird das Verfahren der kubischen Splineinterpolation näher beschrieben.

Aus der Mechanik ist das Prinzip bekannt, dass ein Durchlaufträger, auf den an verschiedenen Punkten unterschiedliche Kräfte wirken, sich so verformt, dass die gesamte Biegeenergie des Balkens minimal wird. Oszillationen treten nicht auf, da diese mit hoher Biegeenergie verbunden wären. Das Prinzip des „Splines“ als Konstruktionshilfe beim Schiffsbau wird auch in der Mathematik benutzt. Die kubische Splineinterpolation führt zu einer Kurve, die einer Biegelinie entspricht.

[10] Mathematik V, S. 20ff

3.2. Mathematische Umsetzung

Die Splinefunktion besteht aus $(n-1)$ kubischen Funktionen, die jeweils für ein Intervall zwischen zwei Stützpunkten $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, ..., $[x_{n-1};x_n]$ definiert sind. Die verschiedenen kubischen Funktionen werden mit $s_1(x)$, $s_2(x)$, ..., $s_n(x)$ bezeichnet. Somit ist $s(x)$ im Gesamtintervall eine Zusammenfassung der einzelnen Funktionen.



3.2.1 Bedingungen für Splines

An den Stützpunkten, die den Übergang von einer Funktion zur nächsten bilden, darf die Gesamtfunktion weder einen Sprung noch einen Knick haben. Daher müssen an dieser Stelle sowohl der Funktionswert als auch die Steigung und die Krümmung der beiden Funktionen identisch sein (die Gesamtfunktion ist dort zweimal stetig differenzierbar):

$$s_i(x+1) = s_{i+1}(x+1)$$

$$s_i'(x+1) = s_{i+1}'(x+1)$$

$$s_i''(x+1) = s_{i+1}''(x+1)$$

Um eine möglichst geringe Gesamtkrümmung zu erreichen (der minimalen Biegeenergie des Balkens entsprechend) muss außerdem gelten:

$$\int_{t_0}^{t_n} s''(x)^2\,dt \leq \int_{t_0}^{t_n} \bar{s}''(x)^2\,dt$$ [11]

[11] Splines.pdf, S.2

3.2.2 Bestimmung der Koeffizienten

Eine kubische Funktion mit dem Aufbau $s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ benötigt zur exakten Bestimmung 4 Koeffizienten $(a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i)$. Bei n Stützpunkten sind das insgesamt $4n$ Unbekannte. Jeweils zwei Stützpunkte $(x_i; y_i)$, $(x_{i+1}; y_{i+1})$ liefern für die zwischen ihnen liegende kubische Funktion zwei Bedingungen

$$s_i(x_i) = y_i = a_i x_i^3 + b_i x_i^2 + c_i x_i + d_i$$

$$s_i(x_{i+1}) = y_{i+1} = a_i x_{i+1}^3 + b_i x_{i+1}^2 + c_i x_{i+1} + d_i \ ,$$

was insgesamt $2n$ Bedingungen ergibt. Durch die Stetigkeitsbedingung (Stetigkeit der ersten und zweiten Ableitung an allen Innenpunkten) erhält man $2(n-1)$ weitere Bedingungen.

Ein Problem bei der Bestimmung der Koeffizienten ergibt sich an den beiden Enden der Funktion $s(x)$, da vor dem ersten und nach dem letzten Stützpunkt die Steigung und Krümmung unbekannt sind. Hier hat man verschiedene Möglichkeiten:

a.) Natürliche Splines oder freier Rand: Die Krümmung im ersten und letzten Punkt wird gleich Null gesetzt, was auch am ehesten einer Biegelinie entspricht, da diese an den äußersten Belastungspunkten auch keine Krümmung aufweist.

b.) Eingespannter Rand: Die Steigung an den beiden Randpunkten ist vorgegeben.

c.) Periodische Randbedingung: Die Steigung und Krümmung der beiden Randpunkte ist gleich

3.3. Anwendung am Beispiel

Aufgabe: Auf dem Intervall $[-1;1]$ sei ein kubischer Spline zu finden, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$s(-1)=0 \qquad s(0)=1 \qquad s(1)=0 \qquad s'(-1)=0 \qquad s'(1)=0$$

Es gibt drei Stützpunkte, daher werden zwei kubische Funktionen mit insgesamt 8 Koeffizienten zur Interpolation benötigt.

Für die erste Funktion (für das Intervall $[-1;0]$) ist bekannt:

$$s_0(x) = a_0 x^3 + b_0 x^2 + c_0 x + d$$

Daraus ergeben sich die folgenden beiden Gleichungen:

$$s_0(-1) = 0 \quad \rightarrow \quad -a_0 + b_0 - c_0 + d_0 = 0$$

$$s_0(0) = 1 \quad \rightarrow \quad d_0 = 1$$

Die Aufgabe gibt die Steigung

$$s_i'(x) = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i$$

am Anfang und am Ende der Gesamtfunktion $s(x)$ vor (eingespannter Rand), daher kann noch die Gleichung

$$s_0'(-1) = 0 \quad \rightarrow \quad 3a_0 - 2b_0 + c_0 = 0$$

aufgestellt werden.

Entsprechend dazu erhalten wir die Gleichungen für die zweite kubische Funktion:

$$s_1(0) = 1 \quad \rightarrow \quad d_1 = 1$$

$$s_1(1) = 0 \quad \rightarrow \quad a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0$$

$$s_1'(1) = 0 \quad \rightarrow \quad 3a_1 - 2b_1 + c_1 = 0$$

Die letzten beiden Gleichungen finden sich in der Forderung nach zweimal stetiger Differenzierbarkeit der Splinefunktion:

$$s_0'(0) = s_1'(0) \quad \rightarrow \quad c_0 = c_1 \quad \rightarrow \quad c_0 - c_1 = 0$$

$$s_0''(0) = s_1''(0) \quad \rightarrow \quad b_0 = b_1 \quad \rightarrow \quad b_0 - b_1 = 0$$

Es kann nun das folgende Gleichungssystem aufgestellt werden:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

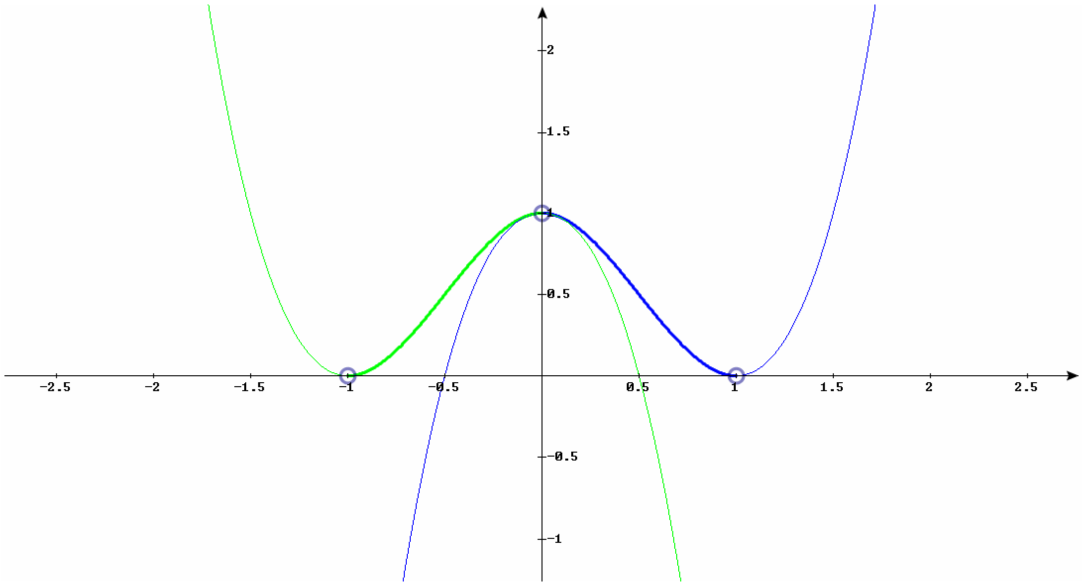
Auf die ausführliche Auflösung des Gleichungssystems wurde hier aus Platzgründen verzichtet. Das Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die beiden gesuchten Funktionen lauten also:

$$s_0(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1 \qquad \text{und} \qquad s_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

Der Graph mit dem aus beiden kubischen Funktionen bestehenden Spline:



[12]

3.4. Erläuterung eines effektiveren Verfahrens

Wie sich leicht erkennen lässt, ist die oben angewandte Art und Weise zur Berechnung der Spline-Koeffizienten ziemlich aufwändig. Für die beiden kubischen Funktionen wird bereits eine $8 \cdot 8$ Felder Matrix benötigt. Pro weiterem Stützpunkt würde sie um 4 Spalten und Zeilen größer werden, was einen enormen Rechenaufwand bedeutet. Daher wird nun ein verbessertes Verfahren eingeführt.

[12] Grelles Grün: $s_0(x)$, Blau: $s_1(x)$, Funktionen sind in dem für sie geltenden Intervall fetter gezeichnet

3.4.1 Mathematische Herleitung

Gegeben:

Gegeben sein eine Menge an paarweisen Stützstellen (x_i, y_i) für $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, so dass für die Knoten des Gitters Δ gilt, dass alle Knoten wie folgt angeordnet sind:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

Gesucht:

Gesucht ist eine Menge von kubischen Splinefunktionen $s_i(x)$, für die gilt, dass $s(x)$ auf dem Gitter Δ (also $[a,b]$ zweimal stetig differenzierbar ist. Es muss folglich

$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}),\ s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \text{ und } s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1})$$

gelten.[13]

Es wird für jedes Intervall zwischen den Punkten (x_i, y_i) und (x_{i+1}, y_{i+1}) ein Polynom 3. Grades mit dem folgenden Aufbau gesucht:

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$ [14]

Ich werde nun der Übersichtlichkeit halber die Länge des Intervalls $(x_{i+1} - x_i)$ durch h_i ersetzen. Wenn man die beiden Endpunkte des Intervalls in die Gleichung einsetzt, erhält man:

$$\begin{aligned} s_i(x_i) &= a_i(x_i - x_i)^3 + b_i(x_i - x_i)^2 + c_i(x_i - x_i) + d_i \\ &= d_i = y_i \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} s_i(x_{i+1}) &= a_i(x_{i+1} - x_i)^3 + b_i(x_{i+1} - x_i)^2 + c_i(x_{i+1} - x_i) + d_i \\ &= a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i = y_{i+1} \end{aligned}$$

Als nächstes werden Steigung und Krümmung der gesuchten kubischen Funktion mit einbezogen. Dafür benötigen wir zunächst die 1. und 2. Ableitung:

$$\begin{aligned} s_i'(x) &= 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i \\ s_i''(x) &= 6a_i(x - x_i) + 2b_i \end{aligned}$$

Zur besseren Übersicht wird von nun an die zweite Ableitung im Punkt (x_i, y_i) durch den Buchstaben S_i und im Punkt (x_{i+1}, y_{i+1}) durch den Buchstaben S_{i+1} ersetzt. Im Folgenden werden die gegebenen Gleichungen nach a_i, b_i, c_i und d_i aufgelöst.

---

[13] Splines.pdf, S. 3
[14] Mathematik V, S. 24

$$d_i = y_i$$

$$s_i''(x_i) = S_i = 6a_i(x - x_i) + 2b_i = 2b_i \quad \Leftrightarrow \quad b_i = \frac{S_i}{2}$$

$$s_i''(x_{i+1}) = S_{i+1} = 6a_i(x_{i+1} - x_i) + 2b_i = 6a_i h_i + 2b_i \quad \Leftrightarrow \quad a_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i}$$

$$s_i(x_{i+1}) = y_{i+1} = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i} h_i^3 + \frac{S_i}{2} h_i^2 + c_i h_i + y_i$$

$$= \frac{S_{i+1} - S_i}{6} h_i^2 + \frac{S_i}{2} h_i^2 + c_i h_i + y_i \quad \Leftrightarrow \quad c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6}$$ [15]

Ausgehend von der Bedingung, dass die Steigungen des linksseitigen und rechtsseitigen Polynoms in den Stützpunkten gleich sein müssen, kann man die Gleichungen zum Lösen der noch benötigten Unbekannten S_i und S_{i+1} aufstellen:

$$s_i'(x_i) = 3a_i(x_i - x_i)^2 + 2b_i(x_i - x_i) + c_i = c_i$$

$$s_{i-1}'(x_i) = 3a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} = 3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}$$

Die Gleichungen werden gleichgesetzt, da $s_i'(x_i) = s_{i-1}'(x_i)$ gilt:

$$c_i = 3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}$$

Nun werden die schon bestimmten Gleichungen für die Koeffizienten eingesetzt und die resultierende Gleichung vereinfacht:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} = 3\left(\frac{S_i - S_{i-1}}{6h_{i-1}}\right)h_{i-1}^2 + 2\left(\frac{S_{i-1}}{2}\right)h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{2h_{i-1}S_{i-1} + h_{i-1}S_i}{6} \left\| - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} = 3\left(\frac{S_i - S_{i-1}}{6h_{i-1}}\right)h_{i-1}^2 + 2\left(\frac{S_{i-1}}{2}\right)h_{i-1} + \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1} - 2h_{i-1}S_{i-1} - h_{i-1}S_i}{6} \left\| \cdot 6 \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) = 18\left(\frac{S_i - S_{i-1}}{6h_{i-1}}\right)h_{i-1}^2 + 12\left(\frac{S_{i-1}}{2}\right)h_{i-1} + 2h_i S_i + h_i S_{i+1} - 2h_{i-1}S_{i-1} - h_{i-1}S_i$$

$$\Leftrightarrow \quad 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) = h_{i-1}S_{i-1} + (2h_{i-1} + 2h_i)S_i + h_i S_{i+1}$$

Diese Gleichung kann für alle Punkte $i = 1$ bis $i = n-1$ verwendet werden. Somit entsteht ein Gleichungssystem, das nur noch die zweiten Ableitungen an den Innenpunkten $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ enthält, was bedeutet, dass $(n-1)$ Gleichungen für $(n-1)$ unbekannte Krümmungen an den

[15] Splines.pdf, S. 4

Innenpunkten entstehen. Die Krümmung an den Enden der Gesamtfunktion wird bei natürlichen Splines gleich 0 gesetzt.

Die resultierenden Gleichungen kann man in einer Matrix darstellen:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{n-1} \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \frac{y_4-y_3}{h_3} - \frac{y_3-y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich nun z.B. mit Derive lösen, wodurch man die Werte der Krümmungen S_i erhält, welche anschließend in die Koeffizientengleichungen eingesetzt werden können um $s_i(x)$ zu bestimmen.

3.4.3 Anwendung am Beispiel

Die schon von der Polynominterpolation und dem Newtonverfahren bekannten Stützpunkte werden nun mit Hilfe des in 3.4.2 eingeführten Verfahrens mit Splines interpoliert.
Gegebene Punkte:

$$s(-2)=2 \qquad s(-1)=0 \qquad s(0)=1 \qquad s(1)=0 \qquad s(2)=2$$ [16]

Definition der Stützstellen:

$$x_0=-2 \qquad x_1=-1 \qquad x_2=0 \qquad x_3=1 \qquad x_4=2$$

Tabelle mit den für die Berechnung nötigen Werten:

i	x_i	y_i	$h_i = x_{i+1} - x_i$	$y_{i+1} - y_i$
0	–2	2	1	–2
1	–1	0	1	1
2	0	1	1	–1
3	1	0	1	2
4	2	2		

[16] Es wurde auch hier zu Vergleichszwecken das gleiche Beispiel wie für die Polynominterpolation benutzt.

Es soll mit natürlichen Splines interpoliert werden, daher gilt:

$$S_0 = S_4 = 0.$$

Die Werte werden in das Gleichungssystem eingesetzt und dieses wird gelöst.

$$\begin{pmatrix} 2(1+1) & 1 & 0 \\ 1 & 2(1+1) & 1 \\ 0 & 1 & 2(1+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1-(-2) \\ -1-1 \\ 2-(-1) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 4II - I \\ \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -66 \\ 18 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II - 4\frac{(15III - II)}{56} \\ \frac{(15III - II)}{56} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -90 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{4}\left(I - \frac{II}{15}\right) \\ \frac{II}{15} \\ \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die Werte werden in die Gleichungen für die Koeffizienten eingesetzt, man bekommt die folgenden Ergebnisse:

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	1	0	–3	2
1	–2	3	0	0
2	2	–3	0	1
3	–1	3	0	0

Diese können nun für die einzelnen Splines in die am Anfang festgelegte Gleichung

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

eingesetzt werden.

$$s_0(x) = (x+2)^3 - 3(x+2) + 2$$

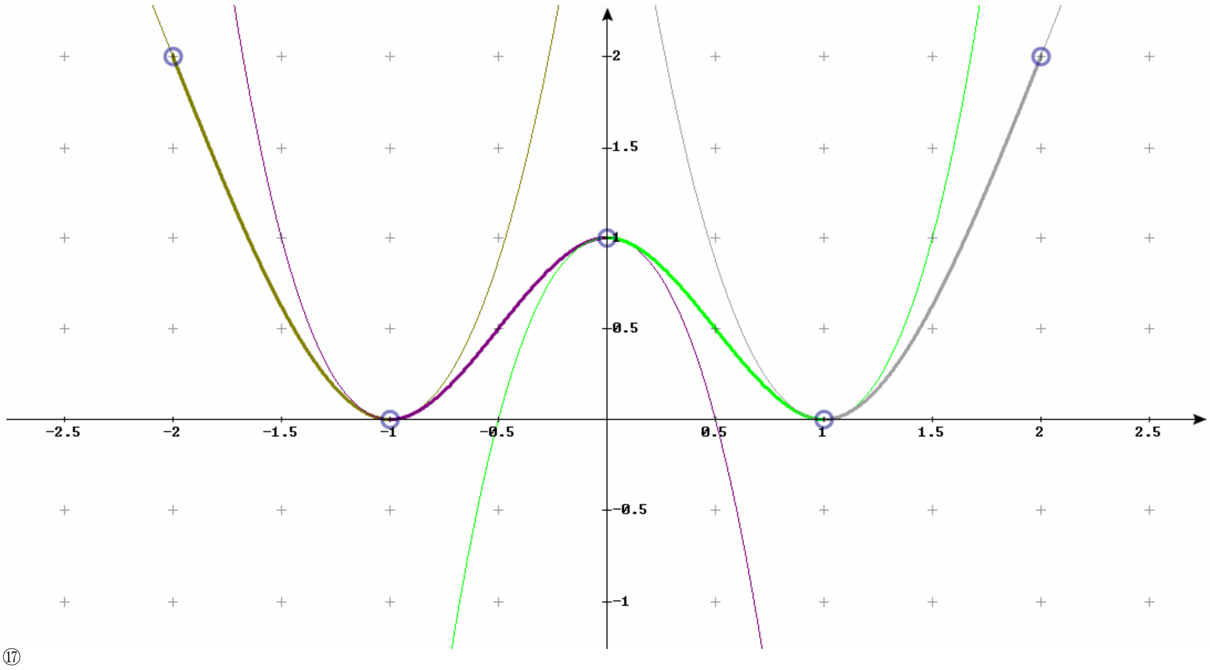
$$s_1(x) = -2(x+1)^3 + 3(x+1)^2$$

$$s_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$s_3(x) = -(x-1)^3 + 3(x-1)^2$$

Die Gleichungen können noch ausmultipliziert und vereinfacht werden, wodurch auch die Symmetrie der Funktionen deutlich wird.

$$s_0(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$$
$$s_1(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1$$
$$s_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$
$$s_3(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$$



[17]

3.5. Vergleich der Verfahren

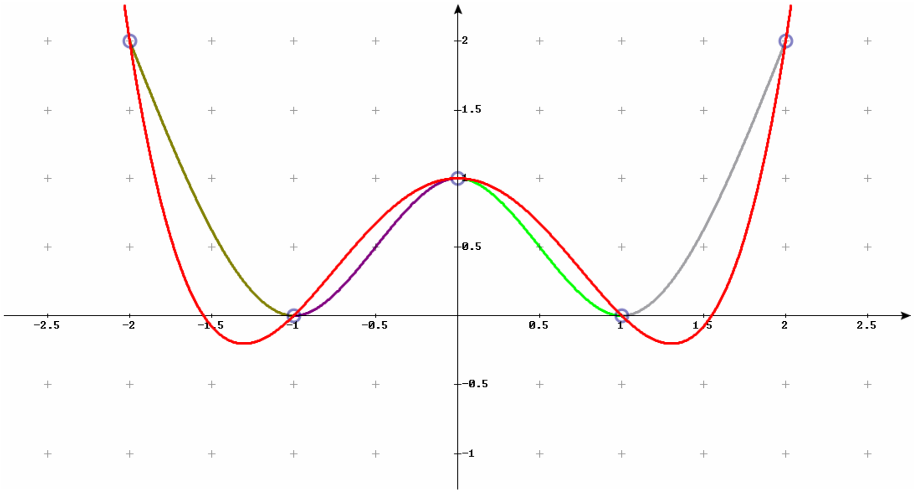
Auf den ersten Blick ist die Interpolation durch ein Polynom leichter zu verstehen und scheint auch nicht so rechenaufwändig zu sein, da man nur eine Funktion statt vieler berechnen muss. Allerdings hat die Polynominterpolation einige gravierende Nachteile. So wird das Polynom bei einer großen Anzahl von Stützpunkten ziemlich unhandlich und ist dann auch nicht mehr leicht zu berechnen, da riesige Gleichungssysteme gelöst werden müssen. Wenn zusätzliche Stützpunkte dazu kommen, können diese nicht einfach in die Rechnung mit einbezogen werden. Statt dessen muss das ganze Gleichungssystem neu gelöst werden.[18]

Diese Aufgabe ließe sich mit modernen Computern noch bewältigen, aber es gibt noch einen weiteren großen Nachteil. Das Polynom wird bei wachsender Anzahl von Stützpunkten

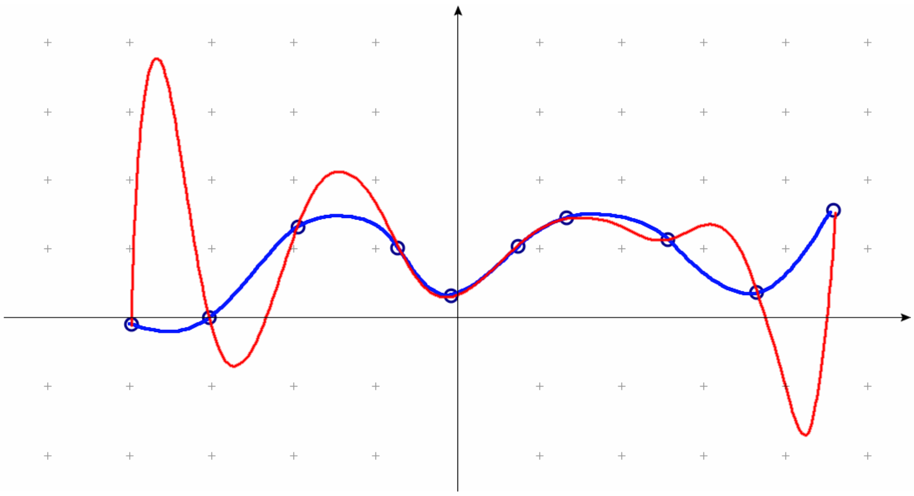
[17] Gelbgrün: $s_0(x)$, Violett: $s_1(x)$, Grelles Grün: $s_2(x)$, Grau: $s_3(x)$

[18] Mathematik V, S. 17

immer welliger, es gibt viele Extrema. Bei einer geringen Anzahl von Stützpunkten ist der Unterschied noch nicht so gravierend, wie man an der folgenden Grafik sieht.



Wenn mehr Stützpunkte hinzukommen wird die hohe Welligkeit des Polynoms deutlich:



Zusammenfassend kann man sagen, dass die Interpolation mit Splines das bessere Verfahren ist. Es zeichnet sich durch Robustheit (keine Oszillationen, lokale Auswirkungen von Änderungen an der Wertetabelle) und Effizienz aus. Daher wird es auch viel häufiger angewandt und die von Programmen benutzten Spline-Algorithmen werden ständig weiter verbessert.

Abschließend kann ich sagen, dass das Themengebiet der Spline-Interpolation sehr interessant und eine Vertiefung im Hinblick auf die Anwendungsgebiete anstrebenswert ist. Die Erarbeitung des Themas hat sich als relativ unproblematisch erwiesen, da es viel Fachliteratur gibt, die allerdings teilweise kompliziert und schwer zu verstehen ist. Ich habe durch die Arbeit viel gelernt. Zur Berechnung von aufwändigeren Beispielen habe ich mich in das Computer Algebra System „Derive“ eingearbeitet, da eine schriftliche Rechnung nicht mehr in annehmbarer Zeit möglich war.