1 Inhaltsverzeichnis

2 Einleitung

„Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt. Das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend gewirkt.“
(David Hilbert)[1]

Die ersten Überlegungen zur Unendlichkeit sind uns aus der Antike überliefert. So erzählt Zenon von Elea die wohl bekannteste Geschichte dazu, das Paradoxon von Achill[2] und der Schildkröte, in dem der schnellere Achill das Tier in einem Wettlauf scheinbar niemals überholen kann, wenn er ihm einen auch noch so kleinen Vorsprung einräumt. Diese und ähnliche Erzählungen zeugen einerseits von Interesse, andererseits aber auch von einer noch nicht mathematisch umfassenden Vorstellung der Unendlichkeit und damit in Zusammenhang stehenden Grenzwertbetrachtungen jener Zeit. Man konnte sich nicht vorstellen, dass unendliche Reihen endliche Grenzwerte haben sollten. Obwohl auch in der Antike bereits Lösungen für solche Paradoxa formuliert wurden, konnten erst mit den Erkenntnissen zur Infinitesimalrechnung von Mathematikern der Neuzeit, wie Leibnitz, Cauchy, Weierstraß und vielen anderen, Grenzwertprobleme auf ein mathematisch solides Fundament gestellt werden.

Diese Facharbeit hat ebensolche Grenzwertuntersuchungen an unendlichen Reihen zur Aufgabe. Ausgangspunkt ist ein Märchen, das die Grenzwertbildung an drei unendlichen Reihen fordert. Zunächst erfolgt die Darstellung der zur Problemlösung notwendigen theoretischen Grundlagen. Anschließend werden die im Aufgabentext verbal gestellten Probleme in eine mathematische Form gebracht. Die Theorie wird daraufhin auf diese Reihen angewandt und die Ergebnisse interpretiert, die Fragestellung des Märchens wird aufgelöst. Ein kurzer Ausblick auf die Relevanz der behandelten Folgen im Alltag und der modernen Mathematik beschließt die Arbeit.

---

[1] Wußing, Hans/Arnold, Wolfgang (Hg.): Biographien bedeutender Mathematiker. 4., bearb. Aufl. Berlin: Verlag Volk und Wissen, 1989, S. 501

[2] vgl. Griesel, Heinz/Postel, Helmut (Hg.): Elemente der Mathematik. Einführung in die Analysis. Hannover: Schroedel Verlag, 2001, S. 118

3 Theoretische Grundlagen

Es erfolgt nun zunächst die Darstellung der für diese Arbeit notwendigen theoretischen Grundlagen.

3.1 Theorie zu Folgen und Reihen[3]

Als Folge oder Zahlenfolge bezeichnet man eine Funktion, deren Definitionsbereich innerhalb der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen liegt. Die einzelnen Funktionswerte heißen dabei Glieder der Folge und werden in der Form a_n dargestellt, wobei a_n das der Zahl n zugeordnete Element ist. n wird als Platznummer oder Index bezeichnet. Um eine Folge von ihrem Glied a_n zu unterscheiden, stellt man sie als $\langle a_n \rangle$ dar. Hat eine Folge die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen oder die Menge $\mathbb{N}^*$ der natürlichen Zahlen ohne Null als Definitionsbereich, so bezeichnet man sie als unendliche Zahlenfolge. Für das einzelne Glied gibt es zwei Arten von Zuordnungsvorschriften. Wird das erste Glied der Folge vorgegeben und eine Formel mit der man das Glied a_n aus a_{n-1} berechnen kann, die man als Rekursionsgleichung bezeichnet, so nennt man diese Zuordnung rekursiv. Wenn eine Formel gegeben wird, mit der man das allgemeine Glied a_n nur anhand des Index n berechnen kann, so nennt man dies eine explizite Zuordnungsvorschrift, welche aber nicht immer existiert. Als Grenzwert oder Limes $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ dieser Folge wird der Wert bezeichnet, für den sich zu jeder beliebig kleinen, positiven Zahl ε ein Index n_0 bestimmen lässt, so dass für alle $n > n_0$ gilt: $\left| a_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n \right| < \varepsilon$. Existiert ein solcher Wert, so nennt man $\langle a_n \rangle$ konvergent. Eine nicht konvergente Folge heißt divergent.

Addiert man alle Folgenglieder einer unendlichen Folge bis hin zu einem bestimmten Index n erhält man eine unendliche Reihe, die man als $\langle S_n \rangle$ darstellt. Die Summen $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ werden als Partialsummen bezeichnet. Unter den Gliedern der Reihe versteht man die Glieder der zugrunde liegenden Folge. Wie bei den Folgen gibt es auch für Reihen außer der rekursiven

[3] vgl. Bronstein, I.N./Semendjaev, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. 5., überarb. Aufl. Thun: Verlag Harri Deutsch, 2000, S. 419ff und
Griesel, Heinz/Postel, Helmut (Hg.): Elemente der Mathematik. Einführung in die Analysis. Hannover: Schroedel Verlag, 2001, S. 17f

Zuordnungsvorschrift bisweilen eine explizite. Formell betrachtet ist eine Reihe auch eine Folge, insofern ist ihr Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} S_n$ entsprechend definiert.

3.2 Grenzwertbestimmungen – verwandte Vorgehensweisen

Im Folgenden soll zunächst theoretisch auf verschiedene Ansätze zur Findung des Grenzwertes einer Reihe eingegangen werden. Dabei werden vorrangig diejenigen Methoden erläutert, die bei der Lösung der relevanten, durch die Aufgabenstellung vorgegebenen Reihen Verwendung finden.

3.2.1 Empirisches Vorgehen

Bevor man sich einem mathematisch korrekten Beweis eines Grenzwertes widmet, ist es oftmals sinnvoll zunächst die Reihenglieder bis zu einem endlichen Wert zu berechnen. Dies kann beispielsweise mithilfe einer Tabellenkalkulation erfolgen. Bei vielen konvergenten Reihen ändern sich die Werte der Partialsummen schon ab recht kleinen[4] Indizes kaum noch, so dass sich ein Grenzwert vermuten lässt. Es gibt allerdings auch konvergente Reihen, bei denen eine Grenzwertvermutung erst bei sehr großen[5] Indizes möglich ist. Bei divergenten Reihen hingegen lässt sich eine solche Entwicklung nicht feststellen, die Werte der Partialsummen wachsen unbeschränkt. Somit ist ein Indiz für die Divergenz gegeben, wenn der Versuch, den Grenzwert empirisch anzunähern, erfolglos bleibt.

Wichtig ist aber zu beachten, dass der durch dieses Vorgehen ermittelte mutmaßliche Grenzwert noch eines mathematischen Beweises bedarf.

3.2.2 Geometrisches Vorgehen

Eine zweite Möglichkeit Grenzwerthypothesen zu erlangen ist, die geometrische Darstellung von Reihen. So kann man z. B. die Folgeglieder als Quadrate darstellen, deren Seitenlänge gleich dem Wert des jeweiligen Folgengliedes ist. Die Summe der Seitenlängen der aneinander gereihten Quadrate entspricht dann dem Wert der Partialsumme. Bei manchen Reihen geht das geometrische Vorgehen über die Hypothesenbildung hinaus und hat sogar Beweischarakter[6], weil geometrische Gesetzmäßigkeiten angewandt werden können. Auch manche Divergenzen lassen sich so beweisen.

[4] $n \geq 10$
[5] $n \geq 1000000$
[6] siehe auch Reihe 2 der Aufgabenstellung

3.2.3 Analytische Ansätze

Während der empirische und der geometrische Ansatz vorrangig zur Hypothesenbildung bezüglich des Grenzwertes der Reihe dienen, haben die folgenden Methoden mathematischen Beweischarakter. Zu beachten ist, dass nicht auf jede Reihe jeder Ansatz anwendbar ist.

3.2.3.1 Notwendiges Konvergenzkriterium[7]

Bevor man sich dem Beweis der Konvergenz und des Grenzwertes einer Reihe widmet, sollte man zunächst überprüfen, ob die Folge der Reihe gegen Null konvergiert, denn dies ist die notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe. Ist sie nicht erfüllt, kann eine Konvergenz verworfen und somit Divergenz festgestellt werden.

3.2.3.2 Integralkriterium nach Cauchy[8]

Ist das notwendige Kriterium aus 4.2.3.1 erfüllt, kann anhand des Integralkriteriums nach Cauchy auf Konvergenz geprüft werden: Wenn es für die Folge, aus der die Reihe gebildet wurde, eine Funktion gibt, so dass für alle Folgenglieder

$$a_n = f(n)$$

gilt, betrachtet man das uneigentliche Integral dieser Funktion:

$$\int_c^\infty f(x)dx \text{ mit } 0 < c < \infty$$

Wenn dieses Integral konvergiert und $f(x)$ monoton fällt, ist auch die Reihe konvergent. Divergiert es, so ist die Reihe divergent. Dieses Kriterium ist allerdings nur anwendbar, wenn eine Funktion existiert, die die genannte Bedingung erfüllt. Aber auch dann liefert sie nicht den Grenzwert selbst, sondern belegt oder widerlegt lediglich die Konvergenz.

3.2.3.3 Explizite Form und Grenzwertbildung[9]

Der Grenzwert einer Reihe lässt sich in einigen Fällen auch direkt ermitteln. Wenn es eine explizite Form S_n der Reihenglieder gibt, kann man den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n$ oft durch Anwendung der Grenzwertsätze und Rückführung auf bekannte Grenzwerte bilden. Auch wenn eine explizite Form nicht gefunden werden konnte, kann es in einigen Fällen trotzdem möglich sein, den Grenzwert auf diese Weise zu bestimmen. Der Vorteil dieser Methode ist, dass man nicht nur die Konvergenz nachweisen, sondern zugleich auch den Grenzwert selbst bestimmen kann.

---

[7] vgl. Bronstein, I.N./Semendjajev, K.A.: Taschenbuch der Mathematik.5., überarb. Aufl. Thun: Verlag Harri Deutsch, 2000, S. 421

[8] vgl. ebd. S. 424

[9] vgl. ebd. S. 421

3.2.3.4 Vergleichskriterium[10]

In vielen Fällen ist es auch möglich für die Reihe $\langle {}_aS_n \rangle$ mit ${}_aS_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ eine weitere Reihe $\langle {}_bS_n \rangle$ mit ${}_bS_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ zu finden, so dass entweder $a_n \leq b_n$ oder $a_n \geq b_n$ von einem bestimmten n an gilt. Man bezeichnet $\langle {}_bS_n \rangle$ dann als Majorante bzw. Minorante von $\langle {}_aS_n \rangle$. Wenn die Majorante konvergiert, so ist auch die zu analysierende Reihe konvergent, divergiert aber die Minorante, so divergiert sie.

3.2.3.5 „Taylorreihe"

Im Kapitel 4.2.3.5 wird gezeigt werden, dass der Grenzwert der dritten Reihe über Verwendung der Taylorreihe ermittelt werden kann. Kenntnisse der Taylorreihe werden vorausgesetzt und aus Gründen des Umfangs nicht in dieser Arbeit behandelt. Der interessierte Leser sei auf einschlägige Literatur verwiesen, z. B. Bronstein[11].

[10] vgl. Bronstein, I.N./Semendjajev, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. 5., überarb. Aufl. Thun: Verlag Harri Deutsch, 2000, S. 422

[11] vgl. ebd. S. 433

4 Praktische Umsetzungen

Im Folgenden soll die Theorie auf das gegebene Märchen bzw. die Aufgabenstellung angewandt werden.

4.1 Mathematisierung des gestellten Problems

4.1.1 Text der gestellten Aufgabe und allgemeine Beschreibung des Problems

Reihenweise Pflastersteine
(Ein mathematisch — Treitz'sches Märchen, unwirklich aber wahr)

Es war einmal ein Kalif, der war im ganzen Osten sehr beliebt, weil er so großzügig war. Trotzdem hatte es jemand auf sein Leben abgesehen, der selber gerne Kalif geworden wäre; wir wollen zur Strafe nicht seinen Namen nennen. Zwei getreue Diener jedoch retteten ihn, wie in Märchen üblich, in letzter Minute. Der Kalif freute sich begreiflicherweise sehr darüber und versprach jedem der beiden als Geschenk eine goldene Kette, die so lang sein sollte, wie eine Straße aus unendlich vielen Pflastersteinen.
Als der Wesir, der zugleich auch Finanzminister war, davon hörte, bekam er einen großen Schrecken: Auch das reichste Land von der Welt kann nicht unendlich viel Gold verschenken. In seiner Not besuchte er den Mathematikprofessor der Universität von Bagdad, der ihm schon oft bei kniffligen Problemen geholfen hatte. „Es ist schon einmal gut, daß der Kalif nichts über die Größe der Pflastersteine gesagt hat“, meinte der Mathematiker. „Also nehmen wir ganz kleine Steine?“, fragte der Wesir voller Hoffnung. „Das hilft auch nicht viel, wenn es unendlich viele sind; wir sollten sie vielleicht verschieden groß machen.“ „Wir nehmen einen Stein von einer Elle Länge, dann einen von einer halben, dann einen von einer Drittel-Elle und immer so weiter. Dann müßten wir doch mit einer endlichen Kette auskommen?“ „Du wirst Dich wundern, auch diese wäre unendlich lang! Aber ich mache Dir einen weiteren Vorschlag. Wir sagen dem Diener, er soll sich eine Zahl aussuchen, die größer als 0 und kleiner als 1 ist. Der erste Stein soll eine Elle lang sein und jeder weitere soll sich in seiner Länge zum vorigen so verhalten, wie die ausgesuchte Zahl zur Zahl 1.“ Der Wesir zog an seiner Wasserpfeife und meinte skeptisch: „Und wenn er sich nun die Zahl 999/1000 aussucht?“„Dann wird er dafür mit einer ganz schön langen Kette belohnt, sie ist 1000 Ellen lang. Wir können ihm aber auch noch eine andere Möglichkeit vorschlagen: Der allererste Stein, der die Nummer 0 haben soll, sei wieder eine Elle lang, aber diesmal darf sich der Diener eine beliebige positive Zahl aussuchen. Jede Steinlänge soll sich dann aus der vorigen ergeben, indem wir sie mit dieser Zahl malnehmen, aber außerdem noch durch die Nummer des Steins teilen.“ Der Wesir wurde ganz bleich: „Und das soll endlich sein?“„Es ist endlich, aber Du solltest trotzdem hoffen, daß er es mit der Größe der Zahl nicht allzu sehr übertreibt, sonst wird es für die Staatskasse teuer.“ In der Nacht schlief der Wesir schlecht und träumte von allerhand Dingen, die der Mathematiker noch versucht hatte, ihm zu erklären: Folgen, Reihen, Grenzwerte, harmonische und geometrische Bildungsgesetze, Exponentialfunktion. Es erschienen dem Wesir im Traum Mathematiker späterer Jahrhunderte, die sich Leibnitz, Euler und Taylor nannten und mit denen er zusammen Straßen aus unendlich vielen Steinen entlangspazieren mußte, mit immer kürzeren Schritten, hinter sich eine goldene Kette ziehend...
Am nächsten Morgen nahm der Wesir ein großes Blatt Papier und zeichnete nach den drei Rezepten Straßen aus quadratischen Pflastersteinen. Beim dritten Rezept nahm die Größe der Steine erst beängstigend zu, verkrümelte sich aber recht plötzlich zu winzigen Staubkörnchen. Beim zweiten Rezept konnte man sogar die überstehenden Ecken mit einer Geraden verbinden und daraus nicht nur ablesen, daß der Mathematiker recht hatte, sondern auch noch, wie lang die Straße für einen bestimmten Zahlenfaktor war. Und als er das erste Rezept anging, so war er heilfroh, daß er rechtzeitig gewarnt worden war. Schließlich ging er erleichtert zum Kalifen und unterbreitete ihm die Ausführungsbestimmungen für das gegebene Versprechen, das auf diese Weise wortgetreu eingehalten werden konnte.
Der eine Diener wählte tatsächlich die Vorschrift, die wir als zweite betrachtet haben, mit dem Faktor 9999/10000, der andere wählte das dritte Rezept mit dem Faktor 8. Wer von den beiden Dienern des Kalifen hat nun die längere Kette erhalten?

Das Problem dieser Aufgabe lässt sich auf die Grenzwertbildung unendlicher Reihen zurückführen. Die Größe der Pflastersteine wird dabei durch die Glieder einer Folge angegeben. Die Gesamtlänge der Straße bis zu einem Pflasterstein entspricht der jeweiligen Partialsumme der Reihe dieser Folge. Die Gesamtlänge einer Straße und damit der zugehörigen Goldkette wird durch den Grenzwert dieser Reihe angegeben.

4.1.2 Aufstellung der rekursiven und expliziten Zuordnungsvorschriften

Ziel ist es nun zunächst für die drei, im Aufgabentext genannten, Möglichkeiten der Steingrößen der Straße, die entsprechenden Zuordnungsvorschriften der Folgen zu finden und anschließend die zugehörigen Reihen zu bilden. Anschließend kann die Bildung der Grenzwerte, sofern solche existieren, erfolgen. Mithilfe dieser Betrachtungen sollen die im Märchen gestellten Fragen beantwortet werden.

Die **erste Reihe** ergibt sich aus folgender Passage des Textes:

„Wir nehmen einen Stein von einer Elle Länge, dann einen von einer halben, dann einen von einer Drittel-Elle und immer so weiter. Dann müßten wir doch mit einer endlichen Kette auskommen?"

Offensichtlich ist die Folge $\langle h_n \rangle$, welche die Größe der Steine beschreibt, diese:

$$h_1 = \frac{1}{1};\ h_2 = \frac{1}{2};\ h_3 = \frac{1}{3};\ h_4 = \frac{1}{4};\ \ldots;\ h_n = \frac{1}{n}$$

Dabei gibt h_1 die Größe des ersten Steines, h_2 die des zweiten, … und h_n die des n-ten Steines an. Die Wahl des Symbols h für die Folge $\langle h_n \rangle$ wurde gewählt, weil sie in der Literatur als *harmonische Folge* bekannt ist. $h_n = \frac{1}{n}$ ist die explizite Zuordnungsvorschrift der Folge.

Die zugehörige Reihe lautet:

$$_hS_n = \sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Eine explizite Form dieses Terms existiert nicht. Er kann lediglich angenähert werden[12].

Die **zweite Reihe** ergibt sich aus diesem Textabschnitt:

„Wir sagen dem Diener, er soll sich eine Zahl aussuchen, die größer als 0 und kleiner als 1 ist. Der erste Stein soll eine Elle lang sein und jeder weitere soll sich in seiner Länge zum vorigen so verhalten, wie die ausgesuchte Zahl zur Zahl 1."

Hier wird die rekursive Zuordnungsvorschrift der Folge $\langle g_n \rangle$, die wiederum die Steingröße angibt, beschrieben:

$$g_1 = 1;\ g_2 = g_1 \cdot k;\ g_3 = g_2 \cdot k;\ g_4 = g_3 \cdot k;\ \ldots;\ g_n = g_{n-1} \cdot k \text{ mit } 0 < k < 1$$

k ist die vom Diener zu wählende Zahl. Das Symbol g wurde hier gewählt, weil die Folge eine sogenannte *geometrische* ist, d. h. der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist konstant.

Diese Darstellung legt die folgende explizite Zuordnungsvorschrift nahe:

[12] Die Näherungsformel lautet $_hS_n \approx \ln n + \gamma$, γ ist die Euler-Mascheroni-Konstante (Freie Enzyklopädie Wikipedia: „Harmonische Reihe". URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Harmonische_Reihe [Stand 18. März 2006].)

$$g_n = k^{n-1}$$

Ein Beweis kann durch vollständige Induktion erbracht werden:

Für $n = 1$ ist sie wahr, denn $g_1 = k^{1-1} = k^0 = 1$. Wenn für ein beliebiges n gilt:

$$g_{n-1} = k^{n-2},$$

dann gilt wegen $g_n = g_{n-1} \cdot k$:

$$g_n = k^{n-2} \cdot k = k^{n-1}$$

Die zugehörige Reihe lautet hier:

$${}_gS_n = \sum_{i=1}^{n} g_i = \sum_{i=1}^{n} k^{i-1}$$

Dieser Term lässt sich explizit ausdrücken:

$${}_gS_n = \frac{1-k^n}{1-k} \text{ für } k \neq 1$$ [13]

Auch dieser Ausdruck lässt sich durch vollständige Induktion beweisen:

Für $n = 1$ ist sie wahr, denn ${}_gS_1 = \frac{1-k^1}{1-k} = 1$. Wenn für ein beliebiges n gilt:

$${}_gS_{n-1} = \frac{1-k^{n-1}}{1-k},$$

dann gilt wegen ${}_gS_n = \sum_{i=1}^{n} k^{i-1} = \sum_{i=1}^{n-1} k^{i-1} + \sum_{i=n}^{n} k^{i-1} = {}_gS_{n-1} + k^{n-1}$:

$${}_gS_n = \frac{1-k^{n-1}}{1-k} + k^{n-1} = \frac{1-k^{n-1} + k^{n-1}(1-k)}{1-k} = \frac{1-k^n}{1-k}$$

Die **letzte Reihe** ergibt sich schließlich aus dieser Textpassage:

„Wir können ihm aber auch noch eine andere Möglichkeit vorschlagen: Der allererste Stein, der die Nummer 0 haben soll, sei wieder eine Elle lang, aber diesmal darf sich der Diener eine beliebige positive Zahl aussuchen. Jede Steinlänge soll sich dann aus der vorigen ergeben, indem wir sie mit dieser Zahl malnehmen, aber außerdem noch durch die Nummer der Steins teilen."

Auch hier wird wieder die rekursive Zuordnungsvorschrift der Folge beschrieben, die $\langle t_n \rangle$ heißen soll:

$$t_0 = 1;\ t_1 = \frac{t_0 \cdot k}{1};\ t_2 = \frac{t_1 \cdot k}{2};\ t_3 = \frac{t_2 \cdot k}{3};\ \ldots;\ t_n = \frac{t_{n-1} \cdot k}{n} \text{ mit } 0 < k$$

Wieder ist k die gewählte Konstante. Warum t als Symbol für diese Folge gewählt wurde, wird zu späterem Zeitpunkt[14] noch erläutert werden. Wie durch den Aufgabentext vorgegeben

[13] vgl. Griesel, Heinz/Postel, Helmut (Hg.): Elemente der Mathematik. Einführung in die Analysis. Hannover: Schroedel Verlag, 2001, S. 95

wurde, wird hier mit t_0, nicht mit t_1, als erstem Folgenglied begonnen. Aus der rekursiven Form ergibt sich, da t_0 n-mal mit der Konstanten k multipliziert wird und durch alle natürlichen Zahlen von 1 bis n geteilt wird, die explizite Darstellung:

$$t_n = \frac{t_0 \cdot k^n}{n!} = \frac{k^n}{n!} \text{ (wegen } t_0 = 1\text{)}$$

Ein Beweis erfolgt hier wieder durch vollständige Induktion:

Für $n = 0$ ist sie korrekt, denn $t_0 = \frac{k^0}{0!} = 1$. Wenn nun für ein beliebiges n gilt:

$$t_{n-1} = \frac{k^{n-1}}{(n-1)!},$$

dann gilt wegen $t_n = \frac{t_{n-1} \cdot k}{n}$:

$$t_n = \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{k}{n} = \frac{k^n}{n!}$$

Die zu $\langle t_n \rangle$ gehörende Reihe $\langle {}_tS_n \rangle$ ist durch folgende Zuordnung definiert:

$${}_tS_n = \sum_{i=0}^{n} t_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{k^i}{i!}$$

Eine explizite Form dafür lässt sich nicht finden.

[14] siehe Abschnitt 4.2.3.5

4.2 Grenzwertbestimmungen

Nachfolgend sollen die oben beschriebenen Vorgehensweisen angewandt, somit die durch die Aufgabe vorgegebenen Reihen auf Konvergenz überprüft und, falls existent, ihre Grenzwerte bestimmt werden.

4.2.1 Empirische Ansätze

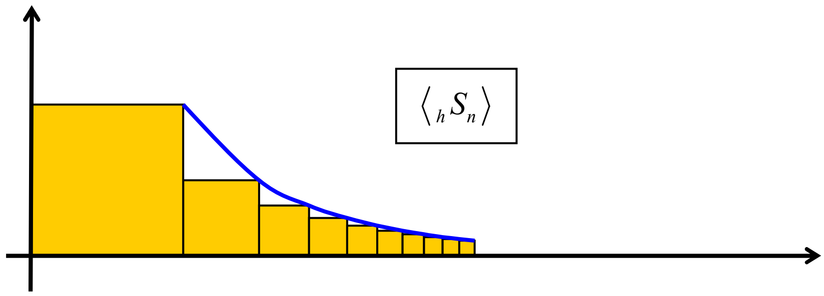
Wie erläutert, werden nun für die einzelnen Reihen zunächst die Werte der Folgen- bzw. Reihenglieder bis zu einem bestimmten Index berechnet. Für die drei Folgen und Reihen ergibt sich dabei folgende Wertetabelle, in der bei $\left\langle {}_{g}S_{n} \right\rangle$ $k = \frac{4}{5}$ und bei $\left\langle {}_{t}S_{n} \right\rangle$ $k = 1$ gewählt wurden:

n	h_n	${}_{h}S_n$	g_n	${}_{g}S_n$	t_n	${}_{t}S_n$
0	-	-	-	-	1,000	**1,000**
1	1,000	**1,000**	1,000	**1,000**	1,000	**2,000**
2	0,500	**1,500**	0,800	**1,800**	0,500	**2,500**
3	0,333	**1,833**	0,640	**2,440**	0,167	**2,667**
4	0,250	**2,083**	0,512	**2,952**	0,042	**2,708**
5	0,200	**2,283**	0,410	**3,362**	0,008	**2,717**
6	0,167	**2,450**	0,328	**3,689**	0,001	**2,718**
7	0,143	**2,593**	0,262	**3,951**	0,000	**2,718**
8	0,125	**2,718**	0,210	**4,161**	0,000	**2,718**
9	0,111	**2,829**	0,168	**4,329**	0,000	**2,718**
10	0,100	**2,929**	0,134	**4,463**	0,000	**2,718**
11	0,091	**3,020**	0,107	**4,571**	0,000	**2,718**
12	0,083	**3,103**	0,086	**4,656**	0,000	**2,718**
13	0,077	**3,180**	0,069	**4,725**	0,000	**2,718**
14	0,071	**3,252**	0,055	**4,780**	0,000	**2,718**
15	0,067	**3,318**	0,044	**4,824**	0,000	**2,718**
Hypothese→ ∞	0	∞	0	**5**	0	**2,718 = e**

Für alle drei **Folgen** kann man aufgrund dieser Werte als Grenzwert Null vermuten. Die **Reihen**entwicklung ist aber nicht so eindeutig. Ein Grenzwert der Reihe $\left\langle {}_{h}S_{n} \right\rangle$ lässt sich hier zunächst nicht ablesen, was ein Indiz für ihre Divergenz ist. $\left\langle {}_{g}S_{n} \right\rangle$ hingegen scheint gegen 5 zu konvergieren, ebenso konvergent zu sein scheint $\left\langle {}_{t}S_{n} \right\rangle$, wobei sich hier ungefähr $2,718$ als Grenzwert abzeichnet. Dieser Wert erinnert stark an die Eulersche Zahl e. Wählt man für k andere Werte wie 2 oder 3, so deuten sich als Grenzwerte Zahlen an, die auf e^2 bzw. e^3 hindeuten. Für die dritte Reihe kann also vermutet werden, dass ihr Grenzwert e^k ist. Im Weiteren sind diese Hypothesen nun zu überprüfen.

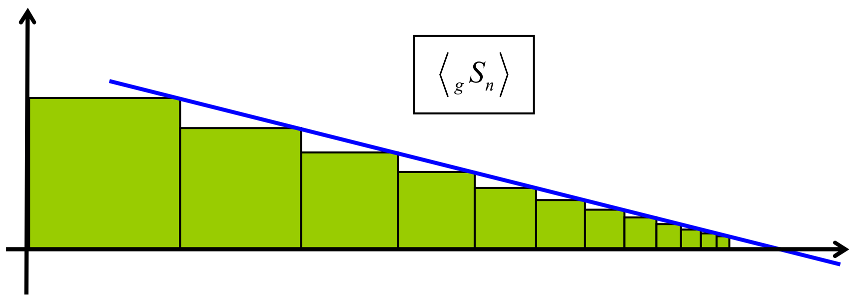
4.2.2 Geometrische Ansätze

Zur geometrischen Betrachtung werden die Reihen grafisch dargestellt. Dabei werden die Folgenglieder (im Märchen Pflastersteine) durch Quadrate, die im kartesischen Koordinatensystem nebeneinander angeordnet werden und deren Seitenlänge dem jeweiligen Folgenglied entspricht, dargestellt (siehe Zeichnungen). Für $\left\langle {}_h S_n \right\rangle$ ergibt sich dabei folgende Figur:



Es erhärtet sich der Verdacht der Divergenz dieser Reihe, denn wäre sie konvergent, so würde eine unendliche Anzahl dieser Quadrate nebeneinander in horizontaler Richtung eine endliche Länge, den Grenzwert der Reihe, nicht überschreiten. Dort müsste die blau eingezeichnete Kurve eine Nullstelle haben. Aus der Betrachtung lässt sich aber Gegenteiliges vermuten.

Anders ist es bei der geometrischen Darstellung von $\left\langle {}_g S_n \right\rangle$, hier für $k = \frac{4}{5}$ gezeichnet:



Offensichtlich lassen sich hier die oberen rechten Ecken der Quadrate durch eine Gerade verbinden. Dies lässt sich auch beweisen, denn wie an der Abbildung deutlich wird, hat die Ecke des n-ten Quadrats die Koordinaten $P_n\left({}_g S_n \mid g_n\right)$. Es gilt also für $0 < \mathrm{k} < 1$:

$$x = {}_g S_n = \frac{1-k^n}{1-k} \Leftrightarrow kx - x + 1 = k^n \Leftrightarrow n = \log_k(kx - x + 1)$$

und

$$y = g_n = k^{n-1}$$

Durch Einsetzen der umgestellten oberen Gleichung in die untere ergibt sich dann:

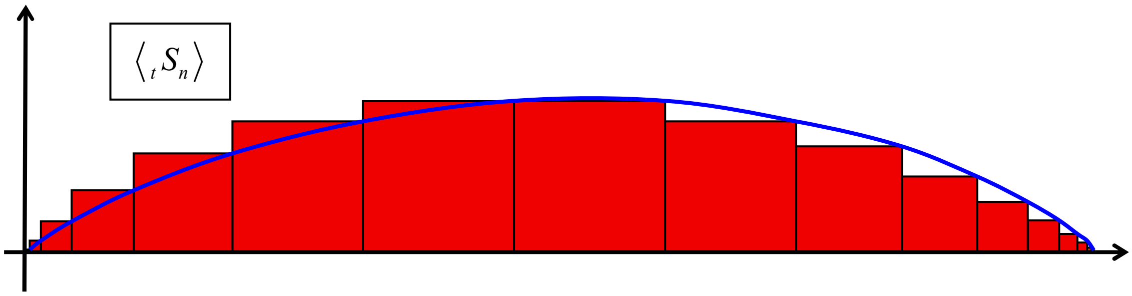
$$y = k^{\log_k(kx-x+1)-1} = \frac{k^{\log_k(kx-x+1)}}{k} = \frac{kx - x + 1}{k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)x + \frac{1}{k}$$

Dies ist eine Geradengleichung. Da die Fläche der Quadrate nicht negativ werden kann, kann die Reihe die Nullstelle dieser Geraden nicht überschreiten. Hier ist also ihr Grenzwert. Für die Nullstelle x_0 der Geraden gilt:

$$x_0 = \frac{1}{1-k} = \lim_{n\to\infty} {}_gS_n \text{ mit } 0 < k < 1$$

Damit ist der Grenzwert der geometrischen Reihe bereits durch den geometrischen Ansatz gefunden und bewiesen.

Bei der letzten Reihe $\langle {}_tS_n \rangle$, hier mit $k = 8$ dargestellt, kann man eine ähnliche Beobachtung machen:



Auch hier sieht es so aus, als hätte die umschreibende Kurve eine Nullstelle, aber da eine explizite Form der Reihe nicht gefunden werden konnte, ist es hier nicht so einfach wie bei $\langle {}_gS_n \rangle$ möglich, eine Funktion für diese Kurve zu finden. Aber zumindest ein weiteres Indiz für die Konvergenz dieser Reihe ist hiermit gefunden.

4.2.3 Analytische Ansätze

4.2.3.1 Überprüfung des notwendigen Kriteriums

Nun soll anhand des notwendigen Kriteriums für die Konvergenz von Reihen überprüft werden, welche der drei Reihen überhaupt konvergieren kann. Dies ist nur der Fall, wenn die zugehörige Folge gegen Null strebt.

Der Grenzwert der Folge $\langle h_n \rangle$ ist

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

Also erfüllt $\langle {}_hS_n \rangle$ das notwendige Kriterium, ebenso wie $\langle {}_gS_n \rangle$, denn

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} k^{n-1} = 0 \text{ (wegen } 0 < k < 1) .$$

Auch für die letzte Reihe ist dieses Kriterium erfüllt, denn es gilt:

$$t_n = \frac{k^n}{n!} = \frac{k^{n_0}}{n_0\,!} \cdot \frac{k}{n_0+1} \cdot \frac{k}{n_0+2} \cdot \ldots \cdot \frac{k}{n}$$

Hierbei sei n_0 so gewählt, dass $n_0 < 2k$ ist. Dann ist $k < \frac{n_0}{2}$, und es gilt weiter:

$$t_n = \frac{k^n}{n!} \le \frac{k^{n_0}}{n_0\,!} \cdot \frac{n_0}{2(n_0+1)} \cdot \frac{n_0}{2(n_0+2)} \cdot \ldots \cdot \frac{n_0}{2n} \le \frac{k^{n_0}}{n_0\,!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0},$$

denn $\frac{n_0}{n_0+1} < 1;\ \frac{n_0}{n_0+2} < 1; \ldots$

Da $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} = 0$, folgt auch für $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \frac{k^n}{n!} = 0$ [15]. Folglich kommen alle drei Reihen für eine Konvergenz in Frage.

4.2.3.2 Überprüfung mit Integralkriterium

Weiterhin wird nun das Integralkriterium nach Cauchy angewandt. Eine Funktion ${}_h f(x)$, für die ${}_h f(n) = h_n$ gilt, ist ${}_h f(x) = \frac{1}{x}$. Durch Integration ergibt sich:

$$\int_c^\infty {}_h f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_c^a \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to\infty}\left[\ln x\right]_c^a = \lim_{a\to\infty} \ln a - \ln c = \infty.$$

Das Integral divergiert, also ist die Reihe $\langle {}_h S_n \rangle$ divergent gegen ∞:

$$\lim_{n\to\infty} {}_h S_n = \infty$$

Eine Funktion ${}_g f(x)$, die die gegebenen Bedingungen für $\langle g_n \rangle$ erfüllt, ist ${}_g f(x) = k^{x-1}$.

$$\int_c^\infty {}_g f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_c^a k^{x-1}dx = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{k^{x-1}}{\ln k}\right]_c^a = \frac{1}{\ln k} \cdot \left(\lim_{a\to\infty} k^{a-1} - k^{c-1}\right) = \frac{0}{\ln k} - \frac{k^{c-1}}{\ln k} = -\frac{k^{c-1}}{\ln k} \quad (\text{wegen } 0 < k < 1)$$

Dieses Integral konvergiert und auch die Funktion ${}_g f(x)$ ist monoton fallend, folglich konvergiert auch die zweite Reihe, was mit den bisherigen Feststellungen übereinstimmt.

Für $\langle {}_t S_n \rangle$ lässt sich nicht ohne weiteres eine integrierbare Funktion finden. Über ihr Verhalten im Unendlichen kann darum aufgrund dieses Kriteriums keine Aussage getroffen werden.

[15] vgl. Griesel, Heinz/Postel, Helmut (Hg.): Elemente der Mathematik. Leistungskurs Analysis. Hannover: Schroedel Verlag, 2001, S. 320f

4.2.3.3 Direkte Grenzwertbildung aus expliziter Form

Da für die erste Reihe keine explizite Form gefunden werden konnte, kann der Grenzwert hier nicht ohne weiteres direkt gebildet werden.

Für die geometrische Reihe konnte eine explizite Zuordnungsvorschrift aufgestellt werden, insofern kann hier der Grenzwert auch direkt durch Limesbildung ermittelt werden:

$$\lim_{n\to\infty} {}_gS_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-k^n}{1-k} = \frac{1}{1-k} - \lim_{n\to\infty}\frac{k^n}{1-k} = \frac{1}{1-k} - 0 = \frac{1}{1-k} \quad \text{(wegen } 0<k<1\text{)}$$

Dieser Grenzwert stimmt, wie nicht anders zu erwarten, mit dem durch geometrische Betrachtung gewonnenen Limes überein.

Direkt beweisen kann man auch den Grenzwert der dritten Reihe, obwohl auch hier kein expliziter Ausdruck vorliegt. Aus dem empirischen Ansatz haben wir die Hypothese gewonnen, dass e^k der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} {}_tS_n$ ist. Da $e^k = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n$ ist, müsste also gelten:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{k^i}{i!}$$

Dies lässt sich durch Umformung auch zeigen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}\cdot\frac{k^i}{n^i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{n^i(n-i)!}\cdot\frac{k^i}{i!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}1\cdot\frac{k^i}{i!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{k^i}{i!}$$

Es ist somit bewiesen, dass:

$$\lim_{n\to\infty} {}_tS_n = e^k$$

4.2.3.4 Grenzwertuntersuchung mit Vergleichskriterium

Der Nachweis der Divergenz der ersten Reihe, die durch das Integralkriterium festgestellt wurde, lässt sich auch anders erbringen. Wenn die einzelnen Folgeglieder eingeklammert werden, dass 1 und $\frac{1}{2}$ allein eingeklammert sind, die folgenden 2 Summanden in einer Klammer stehen, dann 4 usw., so erhält man:

$${}_hS_n = 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\dots$$

Wenn man jetzt die Brüche in den Klammern durch den jeweils kleinsten ersetzt, dann erhält man eine neue Reihe $\langle {}_mS_n \rangle$, für deren Glieder $m_n \le h_n$ für jedes n gilt und die also eine Minorante für $\langle {}_hS_n \rangle$ ist:

$$ {}_{m}S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots $$

Deswegen gilt weiter:

$$ {}_{m}S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots < 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots = {}_{h}S_n $$

Da $\left\langle {}_{m}S_n \right\rangle$ offensichtlich gegen ∞ divergiert, muss auch die so minorisierte Reihe $\left\langle {}_{h}S_n \right\rangle$ so divergieren. Es gilt also:

$$ \lim_{n\to\infty} {}_{h}S_n = \infty $$

4.2.3.5 „Taylorreihe“

Bei der letzten Reihe gibt es noch eine weitere, recht spezielle Möglichkeit Konvergenz und Grenzwert zu zeigen: Bei genauerer Betrachtung fällt eine starke Ähnlichkeit mit der Taylorreihe auf, die folgende Form hat und zur Approximation von Funktionen verwandt wird. Oftmals können stetige Funktionen $f(x)$, für die an der Stelle a alle Ableitungen existieren, durch folgenden Grenzwert beschrieben werden:

$$ f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) $$ [16]

Auf diese Reihe deutet auch der Traum des Kalifen im Aufgabentext hin, in dem Taylor erscheint. Hier wird auch klar, warum für die dieser Reihe zugrunde liegende Folge als Symbol t gewählt wurde: der Grund ist die Ähnlichkeit zur Taylorreihe, die im Folgenden auch zur Findung ihres Grenzwertes genutzt wird:

Um die Taylorreihe in die Form von $\left\langle {}_{t}S_n \right\rangle$ zu bringen, muss als Funktion, wie man gleich sieht, $f(x) = \left(e^k\right)^x = e^{kx}$ verwandt werden, für $a = 0$ und $x = 1$ gewählt werden. Man erhält dann:

$$ f(1) = e^{1k} = e^k = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(1-0)^n}{n!} f^{(n)}(0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n!} \cdot k^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{k^n}{n!} $$

Die Exponentialfunktion zur Basis e kann durch den Grenzwert der Taylorreihe dargestellt werden, was hier nicht näher bewiesen wird. Also ist für den Grenzwert der dritten Reihe erneut bewiesen, dass:

$$ \lim_{n\to\infty} {}_{t}S_n = e^k $$

[16] vgl. Bronstein, I.N./Semendjajev, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. 5., überarb. Aufl. Thun: Verlag Harri Deutsch, 2000, S. 422

Dies deckt sich auch mit den empirischen Beobachtungen.

4.3 Darlegung der Ergebnisse – Auflösung der Problemstellung

Zur Übersicht sind in der folgenden Tabelle die bei der Untersuchung der Reihen angewandten Methoden mir ihren Ergebnissen aufgeführt.

Lösungsansätze	Empirischer Ansatz	Geometr. Ansatz	Analytische Ansätze			
Reihen			Überprüfung notwendiges Kriterium	Überprüfung Integralkriterium	Direkt	Vergleichkriterium
${}_hS_n = \sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$	liefert Indiz	liefert Indiz	erfüllt	beweist Divergenz	nicht anwendbar	beweist Divergenz
${}_gS_n = \sum_{i=1}^{n} g_i = \sum_{i=1}^{n} k^{i-1}$	liefert Indiz	beweist Grenzwert	erfüllt	beweist Konvergenz	beweist Grenzwert	nicht angewandt
${}_tS_n = \sum_{i=0}^{n} t_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{k^i}{i!}$	liefert Indiz	liefert Indiz	erfüllt	nicht anwendbar	beweist Grenzwert	nicht angewandt

Man erkennt, dass nicht immer jede Methode ein Ergebnis liefert. Daraus wird ersichtlich, warum es eine Vielzahl von Ansätzen bzw. Kriterien gibt. Man kann nicht erwarten, mit einer beliebig gewählten Methode zum Ziel zu gelangen.

Für die Auflösung des Märchens sind hier nun noch einmal die Grenzwerte der drei Reihen genannt:

$$\textbf{Reihe 1}: \lim_{n\to\infty} {}_hS_n = \infty \qquad \textbf{Reihe 2}: \lim_{n\to\infty} {}_gS_n = \frac{1}{1-k} \qquad \textbf{Reihe 3}: \lim_{n\to\infty} {}_tS_n = e^k$$

Der Rat des Mathematikers, die erste Reihe nicht zu benutzen, erweist sich also als richtig, da sie zum Staatsbankrott geführt hätte.

Die längere Kette hat der Diener erhalten, der die zweite Reihe mit $k = \frac{9999}{10000}$ gewählt hat, denn sie ist $\lim_{n\to\infty} {}_gS_n = \frac{1}{1-\frac{9999}{10000}} = 10000$ Ellen lang, während der andere Diener mit der dritten Reihe und $k = 8$ eine Kette von nur $\lim_{n\to\infty} {}_tS_n = e^8 \approx 2981$ Ellen erhält.

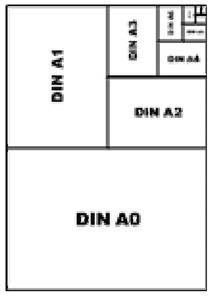
5 Bedeutung der betrachteten unendlichen Reihen

Abschließend soll noch auf die Präsenz der drei behandelten unendlichen Reihen in unserer täglichen Umwelt hingewiesen werden bzw. auf ihre Bedeutung in der Mathematik.
Je ein kurzes Beispiel zu jeder der betrachteten Reihen wird genannt:

<u>Harmonische Reihe</u>

Anwendungen für die harmonische Reihe sind recht selten, wohl aber hat die gleichnamige Folge Bedeutung in der Musik und der Physik (Schwingungen, Obertöne, stehende Wellen).

<u>Geometrische Reihe - DIN A4</u>[17]



Ein Beispiel hierzu ist die Aufteilung eines Blattes Papier vom Format DIN A0: Wenn man dieses halbiert, erhält man bekanntlich DIN A1, dann DIN A2 usw. So kann man alle Formate von DIN A1 an aus einem DIN A0 Blatt erhalten. Dies ist eine Anwendung einer geometrischen Reihe mit $k = \frac{1}{2}$. Der Grenzwert ist dabei 2 mal DIN A1, also DIN A0.

<u>Taylorreihe - Anwendung bei Approximation von Funktionen</u>

Die Anwendung der Taylorreihe ist eher mathematischer Natur; mit ihrer Hilfe lassen sich Funktionen approximieren, so dass auch nicht algebraische Funktionen, wie z. B. die trigonometrischen, von digitalen Rechnern verarbeitet werden können. Dies ist aber auch von enormer Bedeutung für Wissenschaft und Technik.

Diese drei Beispiele können in ihrer Kürze die Relevanz von unendlichen Reihen und ihren Grenzwerten aber nur andeuten, intensivere Betrachtungen würden den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

[17] Quelle der Abb.: Freie Enzyklopädie Wikipedia: „Papierformat“. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Papierformat [Stand 18. März 2006].

6 Literatur

- Athen, Dr. Hermann (Hg.): Unterrichtshefte zur Mathematik. Analysis I. 6. Aufl. Hannover: Schroedel Verlag, 1968
- Bronstein, I.N./Semendjaev, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. 5., überarb. Aufl. Thun: Verlag Harri Deutsch, 2000
- Griesel, Heinz/Postel, Helmut (Hg.): Elemente der Mathematik. Einführung in die Analysis. Hannover: Schroedel Verlag, 2001
- Griesel, Heinz/Postel, Helmut (Hg.): Elemente der Mathematik. Leistungskurs Analysis. Hannover: Schroedel Verlag, 2001
- Niederhauser, Jörg: DUDEN. Die schriftliche Arbeit. 3., neu erarbeitete Aufl. Leipzig: Duden Verlag, 2000
- Schweizer, Wilhelm (Hg.): Lambacher-Schweizer. Analysis. 2. Aufl. Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 1968
- Wußing, Hans/Arnold, Wolfgang (Hg.): Biographien bedeutender Mathematiker. 4., bearb. Aufl. Berlin: Verlag Volk und Wissen, 1989

Verwandte Internetquellen:

- Freie Enzyklopädie Wikipedia: „Harmonische Reihe“.
  URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Harmonische_Reihe [Stand 18. März 2006]

Verwandte Abbildungen:

- Abb. auf Deckblatt: Erstellt mit WinFunktion Mathe 14, Mandelbrotmenge
- Logo auf Titelblatt: Homepage des Gymnasiums Ernestinum Celle:
  URL: http://www.ernestinum-celle.de/graphiken/ernestinumlogo.jpg
  [Stand: 19. März 2006]
- Abb. mit DIN-A-Formaten: Freie Enzyklopädie Wikipedia: „Papierformat“.
  URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Papierformat [Stand 18. März 2006]

7 Anhang

7.1 Versicherung der selbstständigen Anfertigung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt aus anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.
Verwendete Informationen aus dem Internet sind dem(r) Lehrer/in vollständig im Ausdruck zur Verfügung gestellt worden.

Eicklingen, den 23.03.2006

Florian Krause

7.2 Einverständniserklärung zur Veröffentlichung

Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn die von mir verfasste Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit zugänglich gemacht wird.

Eicklingen, den 23.03.2006

Florian Krause

7.3 Ausdrucke der zitierten Internetseiten

Freie Enzyklopädie Wikipedia: „Harmonische Reihe“.
URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Harmonische_Reihe [Stand 18. März 2006]:

Harmonische Reihe

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Harmonische Reihen sind spezielle mathematische Reihen. Eine *harmonische Reihe* ist die Folge, deren Glieder die Summe der ersten *n* Glieder (den *Partialsummen*) einer harmonischen Folge sind.

[...]

Näherungsformel

Für endliche *n* gilt die Näherung:

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \ln(n) + \gamma.$$

ln(*n*) ist hierbei der natürliche Logarithmus. Die Konstante γ (*gamma*) heißt Euler-Mascheroni-Konstante und beträgt ca. 0,5772156649.

Vergleich des gerechneten Werts mit dem der Näherungsformel für verschiedene *n*:

n	Summe	Näherung	Genauigkeit in %
5	2.28	2.19	95.77%
10	2.93	2.88	98.32%
20	3.60	3.57	99.31%
50	4.50	4.49	99.78%
100	5.19	5.18	99.90%
500	6.79	6.79	99.99%
1000	7.49	7.48	99.99%
10000	9.79	9.79	100.00%